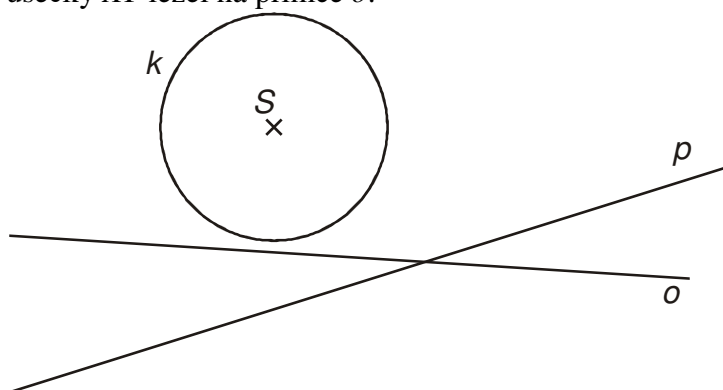


3.4.3 Příklady na osovou souměrnost

Předpoklady: 030402

Př. 1: Jsou dány dvě různoběžné přímky o, p a kružnice $k(S, r)$. Sestroj úsečku XY tak, aby byla kolmá k přímce o , bod X ležel na přímce p , bod Y ležel na kružnici k a střed úsečky XY ležel na přímce o .



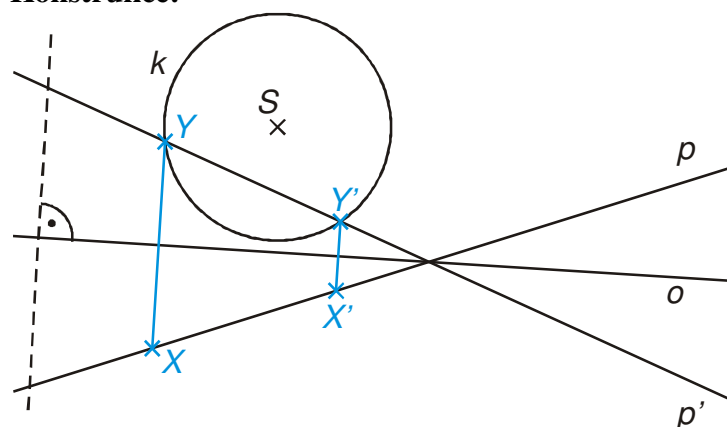
Problém:

- bod X leží na přímce p , ale nevíme kde,
- bod Y leží na kružnici k , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestrojení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadán a nemá nekonečně mnoho řešení.

Nápad: zatím nepoužitá informace ze zadání: úsečka XY je k přímce o kolmá a leží na ní její střed $\Rightarrow$ body XY jsou osově souměrné podle osy $o \Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být X (tedy celou přímku p) a zobrazíme je v osové souměrnosti $O(o)$, hledaný bod X se musí zobrazit na bod Y (tedy na kružnici k) $\Rightarrow$ hledaný bod Y najdeme jako průsečík kružnice k a přímky p' (bod X pak pomocí bodu Y a kolmice na přímku o).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. p, o, k
2. $p'; O(o): p \rightarrow p'$
3. $Y; Y = p' \cap k$
4. $X; O(o): Y \rightarrow X$
5. XY

Diskuse: Úloha může mít 0 – 2 řešení v závislosti na vzájemné poloze přímek p, o a kružnice k .

Dodatek: Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením kružnice k v osové souměrnosti $O(o)$.

Př. 2: Je dána přímka o a na ní bod C . Dále jsou dány dvě navzájem různoběžné přímky a , b obě různé od přímky o . Sestroj všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC tak, aby strana AB byla základnou, těžnice t_C ležela na přímce o a platilo $A \in a$, $B \in b$.

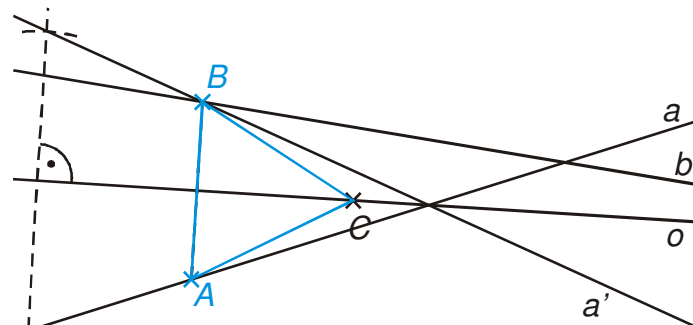
Problém:

- vrchol A leží na přímce a , ale nevíme kde,
- vrchol B leží na přímce b , ale nevíme kde,

$\Rightarrow$ o obou hledaných bodech máme neúplnou informaci, která nám neumožňuje jejich sestavení, přesto je příklad evidentně dostatečně zadán a nemá nekonečně mnoho řešení

Nápad: zatím nepoužitá informace ze zadání: body A , B jsou vrcholy základny rovnoramenného trojúhelníka, všechny rovnoramenné trojúhelníky jsou osově souměrné (osa souměrnosti trojúhelníka se shoduje s osou základny) $\Rightarrow$ body A , B jsou osově souměrné v souměrnosti $O(o) \Rightarrow$ vezmeme všechny body, které mohou být A (tedy celou přímku a) a zobrazíme je v osové souměrnosti $O(o)$, hledaný bod A se musí zobrazit na bod B (tedy na přímku b) $\Rightarrow$ hledaný bod B najdeme jako průsečík přímek b a a' (bod A pak pomocí bodu B a kolmice na přímku o).

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. a, b, o
2. $a'; O(o): a \rightarrow a'$
3. $B; B = a' \cap b$
4. $A; O(o): B \rightarrow A$
5. ABC

Diskuse: Úloha má vždy jedno řešení (přímky a' a b jsou různoběžné a mají vždy jeden průsečík).

Dodatek: Příklad samozřejmě můžeme řešit i zobrazením přímky b v osové souměrnosti $O(o)$.

Př. 3: Najdi společné rysy předchozích příkladů.

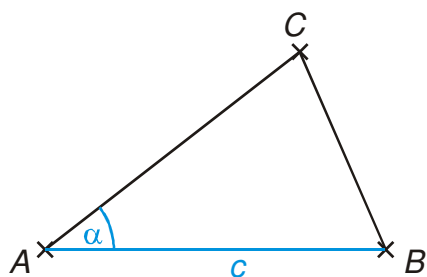
V obou případech:

- hledali jsme dva body, oba body byly určeny pouze částečně,
- zbývající informace v zadání obsahovaly informaci o vzájemném vztahu hledaných bodů (konkrétně osová souměrnost),
- pomocí osové souměrnosti (zobrazením všech „podezřelých“ bodů) jsme informace o poloze jednoho bodu použili ke konstrukci druhého bodu,
- první bod jsme pak pomocí osové souměrnosti našli jako obraz zkonstruovaného druhého bodu,

$\Rightarrow$ osová souměrnost (jak uvidíme dále shodnosti obecně) nám umožňuje „dát dohromady“ částečné informace o konstrukci dvou bodů.

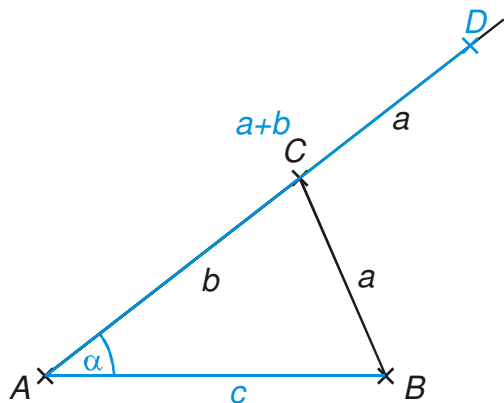
Př. 4: Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno: $c = 5 \text{ cm}$, $\alpha = 50^\circ$, $a + b = 7 \text{ cm}$.

Náčrtek:



Jak do náčrtku zakreslit délku $a+b$?

Zkusíme sledovat konstrukci: snadno sestrojíme trojúhelník ABD



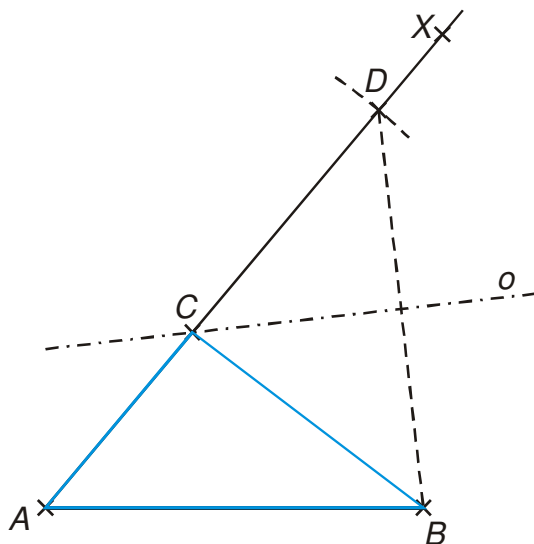
Jak zjistíme polohu bodu C na přímce AD ?

Platí $|AD| = a+b$, $|AC| = b \Rightarrow |CD| = a \Rightarrow$ trojúhelník BCD je rovnoramenný a tedy i osově souměrný podle osy úsečky $BD \Rightarrow$ vrchol C leží na:

- úsečce AD
- ose úsečky BD

$\Rightarrow$ vrchol C snadno nalezneme jako průsečík

Konstrukce:



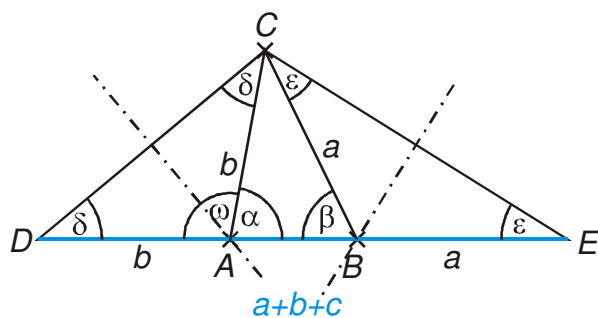
Zápis konstrukce:

1. $AB; |AB| = c = 5 \text{ cm}$
2. $\sphericalangle BAX; |\sphericalangle BAX| = 50^\circ$
3. $D; D \in \overrightarrow{AX}; |AD| = a+b = 7 \text{ cm}$
4. o ; osa úsečky BD
5. $C; C = AD \cap o$
6. $\triangle ABC$

Diskuse: Úloha má jedno řešení.

Př. 5: Sestroj trojúhelník ABC , je-li dáno: $o = 10 \text{ cm}$, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Náčrtek:



Využijeme zkušenosti z předchozího příkladu (hledání vrcholu pomocí osové souměrnosti). Zkoumáme rovnoramenný trojúhelník DAC : pro úhel ω platí: $\omega = 180^\circ - \alpha$ (zbytek do 180°), ze součtu úhlů v trojúhelníku: $\omega + \delta + \delta = 180^\circ - \alpha = 180^\circ$

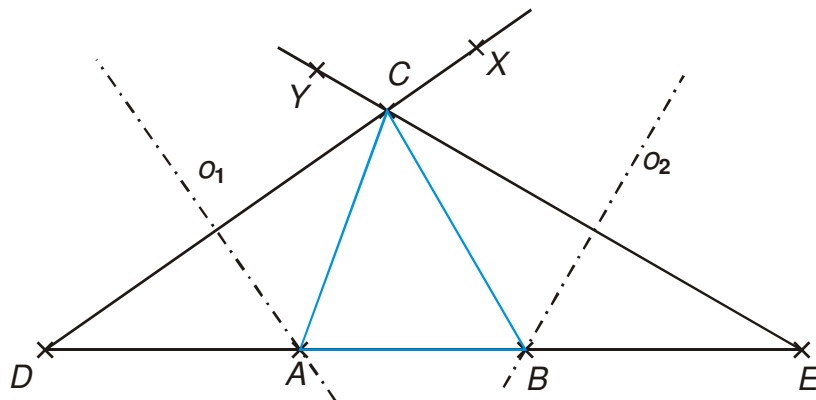
$$2\delta = \alpha \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}\alpha.$$

Podobně platí: $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta$

$\Rightarrow$ můžeme sestavit trojúhelník DEC a pak pomocí osových souměrností najít vrcholy A, B .

Konstrukce:

Zápis konstrukce:



1. $DE; |DE| = c = 10\text{ cm}$
2. $\angle EDX; |\angle EDX| = 35^\circ$
3. $\angle DEY; |\angle DEY| = 30^\circ$
4. $C; C \in \overleftrightarrow{DX} \cap \overleftrightarrow{EY}$
5. o_1 ; osa úsečky DC
6. o_2 ; osa úsečky EC
7. $A; A \in o_1 \cap DE$
8. $B; B \in o_2 \cap DE$
9. $\triangle ABC$

Př. 6: Petáková:

strana 79/cvičení 39

strana 80/cvičení 42

strana 80/cvičení 49 a) d)

Shrnutí: Osová souměrnost nám umožňuje dát dohromady částečné informace o konstruovaných bodech.